Assignment 3

1. 设函数

$$h(x)=\begin{cases}1+\dfrac{x}{10}, & 0\le x\le 0.5,\\ -1+\dfrac{x}{10}, & 0.5<x\le 1.\end{cases}$$

记 $I=\int_0^1 h(x)\,dx$. 用简单 Monte Carlo 和分层抽样法来估计 I，并比较两种估计量的方差。

2. 设 $X\sim N(0,1)$，则 $\theta=P(X>4.5)=3.398\times 10^{-6}$.

(1) 如果直接生成 N 个 X 的随机数，用 $X_i>4.5$ 的比例估计 $P(X>4.5)$，平均多少个样本点中才能有一个样本点满足 $X_i>4.5$?

(3) 取 V 为指数分布 Exp(1)，令 $W=V+4.5$，用 W 的样本进行重要抽样估计 θ，取样本点个数 $N=1000$，求估计值并估计误差大小。

3. 使用 Metropolis–Hastings 抽样算法生成标准 Cauchy 分布的随机数。舍弃马尔可夫链的前 1000 个样本，并将生成样本的十分位数与标准 Cauchy 分布的理论十分位数进行比较（可使用 R 中的 `qcauchy` 或自由度为 1 的 `qt` 函数）。已知 Cauchy(θ,η) 分布的密度为

$$f(x)=\frac{1}{\theta\pi\left[1+\left(\dfrac{x-\eta}{\theta}\right)^2\right]},\qquad -\infty<x<\infty,\quad \theta>0.$$

标准 Cauchy 分布对应 $\theta=1,\ \eta=0$。注意，标准 Cauchy 分布的密度与自由度为 1 的 t 分布密度相同。

4. 服从标准 Laplace 分布的随机变量 X 的密度为

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},\qquad -\infty<x<\infty.$$

利用随机游走 Metropolis 抽样算法，生成标准 Laplace 分布的随机数。提议分布的随机增量取自正态分布。比较提议分布采用不同方差时生成的马尔可夫链，并计算每条链的接受率。

5. 考虑二元联合密度

$$f(x,y) \propto \binom{n}{x} y^{x+a-1}(1-y)^{n-x+b-1}, \qquad x = 0,1,\ldots,n, \quad 0 \le y \le 1.$$

可以证明，对于给定的 a, b, n，其两个条件分布分别为

$$X \mid Y = y \sim \text{Binomial}(n, y), \qquad Y \mid X = x \sim \text{Beta}(x + a, n - x + b).$$

使用 Gibbs 抽样算法生成以 $f(x,y)$ 为目标联合密度的马尔可夫链。