Assignment 2

1. 编写一个函数，用 Monte Carlo 方法估计 Beta(3, 3) 分布的累积分布函数（cdf），并用该函数估计 $x = 0.1, 0.2, \ldots, 0.9$ 处的 $F(x)$。将 Monte Carlo 估计值与 R 中 `pbeta` 函数返回的值进行比较。

2. Rayleigh 分布的密度为

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/(2\sigma^2)}, \qquad x \geq 0,\ \sigma > 0.$$

编写一个函数，使用对偶变量法（antithetic variables）生成服从 Rayleigh(σ) 分布的样本。与两个相互独立的随机变量 X_1, X_2 相比，使用对偶变量 X, X' 时，$\frac{X+X'}{2}$ 的方差相对于 $\frac{X_1+X_2}{2}$ 的方差减少了百分之多少?

3. 使用对偶变量法估计

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+x^2}\, dx,$$

并求出相对于无方差缩减估计量的方差缩减百分比。

4. 用随机模拟法计算二重积分

$$\int_0^1 \int_0^1 e^{(x+y)^2}\, dy\, dx,$$

用对偶变量法改善精度。

5. 不同的检验法有不同的功效，在难以得到功效函数的显式表达式的时候，模拟方法可以起到重要补充作用。对无截距项的回归模型

$$y_i = bx_i + \varepsilon_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2), \qquad x_1, x_2, \ldots, x_n \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, 1),$$

为检验 $H_0 : b = 0$，有如下两种检验方法：

(1) 当 $b=0$ 时 $y_i=\varepsilon_i$，于是，在 H_0 下

$$t=\frac{\bar{y}}{\sqrt{\frac{1}{n}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$$

服从 $t(n-1)$ 分布。设 λ 为 $t(n-1)$ 分布的 $1-\dfrac{\alpha}{2}$ 分位数，取否定域为 $\{|t|>\lambda\}$.

(2) 令

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2},\qquad U=\hat{b}^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2,$$

$$Q=\sum_{i=1}^{n}y_i^2-U,\qquad F=\frac{U}{Q/(n-1)}.$$

设 λ' 为 $F(1,n-1)$ 的 $1-\alpha$ 分位数，取否定域为 $\{F>\lambda'\}$.

取 $n=500$、$\alpha=0.05$，对不同的 b 和 σ^2，模拟比较这两种检验方法的功效。