

Assignment 1

1. 设随机变量 X 表示成功概率为 p 的独立重复试验中第 r 次成功所需要的试验次数, 称 X 服从负二项分布。

(1) 利用负二项分布与几何分布的关系构造 X 的随机数。

(2) 直接利用负二项分布的概率分布构造 X 的随机数。

2. 设随机变量 X 服从二项分布 $B(n, p)$, k 为满足 $0 \leq k \leq n$ 的给定整数, 随机变量 Y 的分布函数为

$$P(Y \leq y) = P(X \leq y \mid X \geq k).$$

记 $\alpha = P(X \geq k)$ 。分别用逆变换法和接受拒绝算法生成 Y 的随机数。当 α 取值大的时候还是取值小的时候接受拒绝算法不可取?

3. 给出生成密度 $p(x) = xe^{-x}, x > 0$ 的随机数的两种方法, 并比较其效率。

4. 设随机变量 X 的分布密度为

$$p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty,$$

称 X 服从双指数分布或 Laplace 分布。用复合法生成 X 的随机数。

5. 设随机变量 X 的概率分布为 $p_k = P(X = k)$, $k = 1, 2, \dots$, 且 $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ 。记

$$\lambda_n = P(X = n \mid X > n - 1) = \frac{p_n}{1 - \sum_{k=1}^{n-1} p_k}, \quad n = 1, 2, \dots$$

(1) 证明

$$p_1 = \lambda_1, \quad p_n = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) \cdots (1 - \lambda_{n-1})\lambda_n, \quad n = 2, 3, \dots$$

如果把 X 看成某种产品的寿命, 则 λ_n 表示此产品在其寿命大于 $n - 1$ 的条件下, 寿命为 n 的概率。 $\{\lambda_n, n \geq 1\}$ 叫做离散机会比。一个生成 X 的随机数的方法是连续生成均匀随机数, 直到第 n 个小于 λ_n , 叫做离散机会比方法, 算法如下:

```

 $k \leftarrow 0$ 
until  $(U < \lambda_k)$  {
    生成  $U \sim U(0, 1)$ 
     $k \leftarrow k + 1$ 
}
 $X \leftarrow k$ 

```

- (2) 证明上述算法产生的随机数符合 X 的分布。
- (3) 假设 X 是一个参数为 p 的几何分布随机变量，求 λ_n , $n = 1, 2, \dots$ 。说明此时上述算法是用来做什么的，它的有效性为什么是明显的？
6. 对于任意的一个 Copula $C : [0, 1]^p \rightarrow [0, 1]$ 和 p 个一元累积分布函数 $F_1, \dots, F_p$ ，构造多元函数 G

$$G(x_1, \dots, x_p) = C(F_1(x_1), \dots, F_p(x_p)).$$

证明：

- (a) G 是一个多元累积分布函数；
 - (b) G 对应的边际分布函数为 $F_1, \dots, F_p$ ；
 - (c) G 对应的 Copula 是 C 。
7. 假设 $X = (X_1, \dots, X_p)$ 的 Copula 为 C 。令 $T_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, p$ ，为严格单调递增函数。

证明：($T_1(X_1), \dots, T_p(X_p)$) 的 Copula 仍然是 C 。