第七次作业

题目 1. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布。

(1) 对任意常数 $c>0$，证明 cX 服从参数为 λ/c 的指数分布；

(2) 对任意正整数 $n \geqslant 1$，计算 $E(X^n)$。

题目 2. 假设有 n（$n \geqslant 3$）个不同的盒子与 m 个相同的小球，每个小球独立地以概率 p_k 落入第 k 个盒子（$k=1,2,\ldots,n$）。分别以 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 表示落入各个盒子的球数。试求：

(1) $E(X_2 \mid X_1 = k)$ 和 $\mathrm{Var}(X_2 \mid X_1 = k)$；

(2) $E(X_1 + X_2)$ 和 $\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_k)$，$k = 1, 2, \ldots, n$。

题目 3. 设某两个风险 (X, Y) 服从二元正态分布 $N(\mu, 2\mu, \sigma^2, 2\sigma^2, \sqrt{2}/4)$，某投资者购买了一个基于这两个风险和的金融衍生品（欧式看涨期权），即到期收益为

$$(X + Y - 3\mu)_+ = \max\{X + Y - 3\mu, 0\}.$$

(1) 求到期收益的期望 $E\big((X + Y - 3\mu)_+\big)$；

(2) 求到期收益的方差 $\mathrm{Var}\big((X + Y - 3\mu)_+\big)$。

题目 4. 设 X_1 和 X_2 是相互独立的指数分布随机变量，期望分别为 1 和 2。定义

$$Y = \min\{X_1, X_2\}, \qquad Z = \max\{X_1, X_2\}.$$

求：

(1) $E(Y)$ 和 $E(Z)$；

(2) $\mathrm{Var}(Y)$ 和 $\mathrm{Var}(Z)$。

题目 5. 设随机变量 X, Y 相互独立，且 X 服从均匀分布 $U(-1, 1)$，Y 服从均值为 $1/2$ 的指数分布，求随机变量 $Z = (X + 1)Y$ 和 X 的相关系数。

题目 6. 设随机变量 (X, Y) 服从二元正态分布，且 $\mathrm{Var}(X) = 1$，$\mathrm{Var}(Y) = 4$。令 $W = X - aY$，$V = X + aY$，试求 a 的值，使得 W 和 V 相互独立。

题目 7. 设二维随机向量 (X, Y) 服从二元正态分布 $N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$，其中 $\mu_1 = \mu_2 = 1$，$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 0.5$，$\rho = 0.5$。记

$$Z = |X - Y|, \qquad U = \max(X, Y), \qquad V = \min(X, Y).$$

(1) 求 Z 的密度函数 $f_Z(z)$；

(2) 求数学期望 $E(U + V)$；

(3) 分别求数学期望 EU 和 EV。