第六次作业

题目 1. 设 (X,Y) 服从矩形 $\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 1\}$ 内的均匀分布，记

$$U=\begin{cases}0, & X\leqslant Y,\\ 1, & X>Y,\end{cases}\qquad V=\begin{cases}0, & X\leqslant 2Y,\\ 1, & X>2Y,\end{cases}$$

求 (U,V) 的联合分布函数。

题目 2. 设某班车起点站上客人数 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布，每位乘客在中途下车的概率为 $p(0<p<1)$，且中途下车与否相互独立。以 Y 表示中途下车的人数，求

(1) 在发车时，有 n 个乘客的条件下，中途有 m 个人下车的概率；

(2) 二维随机变量 (X,Y) 的概率分布。

题目 3. 连续地掷一颗均匀的骰子，直到出现点数大于 2 为止，以 X 表示掷骰子的次数，以 Y 表示最后一次掷出的点数。

(1) 求二维随机变量 (X,Y) 的联合分布以及 X,Y 的边缘分布；

(2) 问 X 和 Y 是否相互独立。

题目 4. 设 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}0.25(1+xy), & |x|<1,|y|<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

(1) 求给定 $X=\dfrac{1}{2}$ 时，Y 的条件密度函数；

(2) 证明 X^2 和 Y^2 相互独立。

题目 5. 设二维随机变量 X, Y 的联合概率密度函数为:

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<2x\\ 0, & \text{others}\end{cases}$$

(1) 试求出 X, Y 的边际概率密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$;
(2) 试求出 $Z=2X-Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$;
(3) 试求 $P\left(Y \leqslant \frac{1}{2} \mid X=\frac{1}{2}\right)$。

题目 6. 证明: 对于二维联合正态分布 $(X,Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, X 和 Y 相互独立当且仅当 $\rho=0$。