概率论与数理统计

Lecture 5：多维随机变量及其分布

曾靖

中国科学技术大学统计与金融系



目录

3.1 多维随机变量及其分布

3.2 边缘 (际) 分布

3.3 条件分布

3.4 相互独立的随机变量

3.5 随机向量函数的分布

3.1 多维随机变量及其分布

多维随机变量的引入

例 1　产品检验：同时关心两个结果

随机抽取 3 件产品，依次检验（A：合格；$\bar{A}$：不合格）。

- X：3 件产品中的**合格品件数**；
- Y：**首次抽到合格品的次序**，未抽到则记为 0。

结果	$\bar{A}\bar{A}\bar{A}$	$\bar{A}\bar{A}A$	$\bar{A}A\bar{A}$	$A\bar{A}\bar{A}$	$AA\bar{A}$	$A\bar{A}A$	$\bar{A}AA$	AAA
X	0	1	1	1	2	2	2	3
Y	0	3	2	1	1	1	2	1

- 同一个试验结果对应一对数 (X, Y)，构成**二维随机向量**。

多维随机变量的引入

例 2　未来 7 天的天气

观测未来 7 天的天气，按统一标准将每天归为阴天、晴天、雨天中的一类，同时记录

- X_1：阴天的天数；
- X_2：晴天的天数；
- X_3：雨天的天数。

- $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ 构成**三维随机向量**，且

$$X_1 + X_2 + X_3 = 7.$$

- 例如，2 天阴、3 天晴、2 天雨，对应 $\mathbf{X} = (2, 3, 2)$。

多维随机变量

定义 3.1　多维随机变量

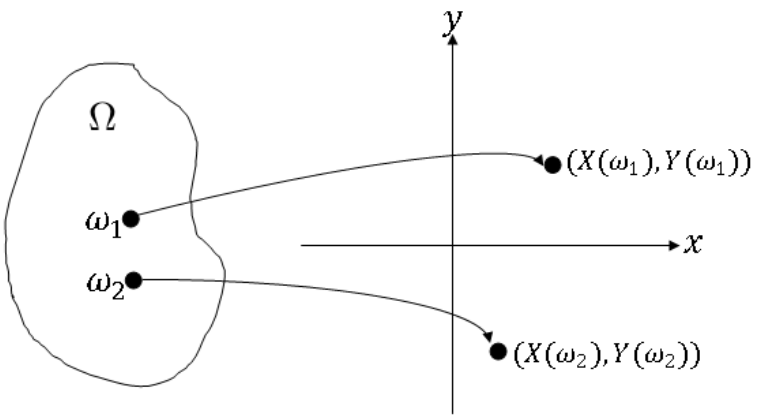
设 $X_1, \ldots, X_n$ 是**同一样本空间** Ω 上的随机变量。映射

$$\begin{aligned} \mathbf{X} : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ \omega &\longmapsto \big(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\big) \end{aligned}$$

称为 n 维随机变量或**随机向量**，简记为 $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$。

- 随机向量也分为**离散型**、**连续型**及其他类型。

随机向量：联合分布的直观图像



二维联合分布函数

定义 3.2　二维分布函数

设 (X, Y) 为二维随机变量。对任意 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$，称

$$\begin{aligned} F(x, y) &= P(X \le x,\ Y \le y) \\ &= P\big(\{X \le x\} \cap \{Y \le y\}\big) \end{aligned}$$

为 (X, Y) 的**联合分布函数**（joint cdf）。

联合分布函数的性质

性质

1. **单调性：** 分别对 x, y 非减；
2. **边界条件：** $0 \le F(x,y) \le 1$，且

$$F(+\infty, +\infty) = 1, \qquad F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0;$$

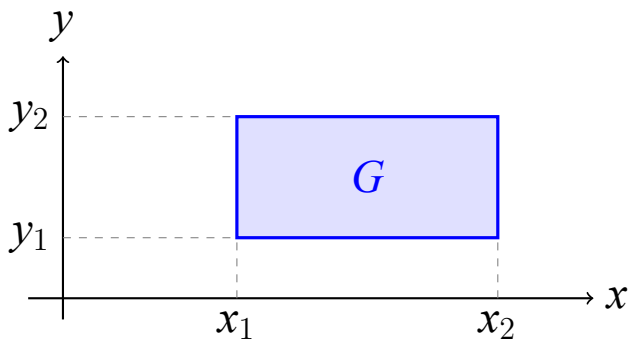
3. **右连续性：** 分别关于 x, y 右连续；
4. **矩形增量非负：** 对 $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$，

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \ge 0.$$

联合分布函数：判别

- 满足前述四条性质的二元函数，就是某个随机向量的联合分布函数。
- **分别单调非减还不够**：还须保证每个矩形上的概率非负。

矩形概率的几何解释



- 根据**二维联合分布函数**，可以求出随机点 (X, Y) 落在矩形区域 $G = (x_1, x_2] \times (y_1, y_2]$ 内的概率。

联合分布函数与矩形概率

- 对任意 $x_1 < x_2,\ y_1 < y_2$，矩形区域上的概率为

$$\begin{aligned} &P(x_1 < X \le x_2,\ y_1 < Y \le y_2) \\ &\quad = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) \\ &\qquad - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1). \end{aligned}$$

- 将左下方的累积概率相减，再加回被重复减去的部分。

二维离散型随机变量

定义 3.3　二维离散型随机变量

若 (X, Y) 只取有限个或可数个点 (x_i, y_j)，则称其为**二维离散型随机变量**。称

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$$

为其**联合分布律**或联合概率质量函数（joint pmf）。

- 联合分布律满足 $p_{ij} \geq 0$，$\sum_{i,j} p_{ij} = 1$。

二维离散型随机变量

- 当 X, Y 取有限个值时，可列表表示联合分布律。

$X\backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_m	行和
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nm}	$p_{n\cdot}$
列和	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot m}$	1

例：多项分布

例 3　多项分布

设 $A_1, \ldots, A_n$ 为某一试验下的完备事件群，即两两互斥且和为 Ω。记

$$p_k = P(A_k), \quad k = 1, \ldots, n, \qquad p_k \geq 0, \quad p_1 + \cdots + p_n = 1.$$

将试验独立重复进行 N 次，用 X_i 表示事件 A_i 出现的次数，则 $X = (X_1, \ldots, X_n)$ 为离散型随机向量。求其概率函数。

例：多项分布（续）

- 解：

$$P(X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n) = \frac{N!}{k_1! \cdots k_n!} p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n},$$

其中 $k_1, \ldots, k_n$ 为非负整数且 $k_1 + \cdots + k_n = N$。此分布称为**多项分布**，记为

$$M(N; p_1, \ldots, p_n).$$

二维连续型随机变量

定义 3.5　二维连续型随机变量

设 $(X,Y) \sim F(x,y)$，若存在可积的非负函数 $f(x,y)$，使得对任意 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$，

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\, dv\, du,$$

则称 (X,Y) 为连续型二维随机变量，$F(x,y)$ 为连续型二维联合分布函数，$f(x,y)$ 为**联合概率密度函数**（joint pdf）。

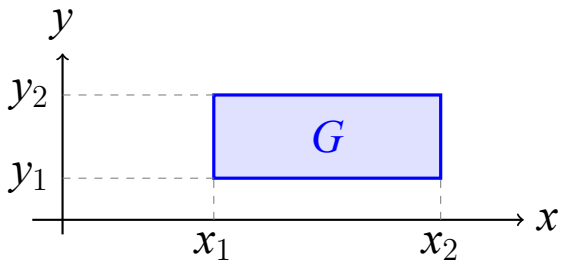
联合概率密度函数的性质

性质

1. **非负性：** $f(x,y) \geq 0$；
2. **规范性：** $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1$；
3. **区域概率：** 对可测区域 $G \subseteq \mathbb{R}^2$，

$$P\big((X,Y) \in G\big) = \iint_G f(x,y)\,dx\,dy.$$

回顾：由联合密度求矩形概率



- 对矩形区域 $G = (x_1, x_2] \times (y_1, y_2]$，

$$P\big((X,Y) \in G\big) = \iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy\,dx.$$

联合概率密度函数的性质（续）

4. 若联合密度 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续，则

$$\left.\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = f(x_0,y_0).$$

注：若 f 在 (x,y) 处连续，则对很小的正数 $\Delta x, \Delta y$，

$$\begin{aligned} &P(x < X \le x+\Delta x,\ y < Y \le y+\Delta y) \\ &\approx f(x,y)\,\Delta x\,\Delta y. \end{aligned}$$

密度乘以小区域的面积，才近似等于概率。

矩形上的均匀分布

例 4　矩形上的均匀分布

设 $a < b,\ c < d$。若 (X, Y) 的联合密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)(d-c)}, & (x,y) \in [a,b] \times [c,d], \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

则称 (X, Y) 服从矩形 $[a, b] \times [c, d]$ 上的**均匀分布**。

二元正态分布

例 5　二元正态分布

设 $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, $|\rho| < 1$, 记 $u = (x - \mu_1)/\sigma_1$, $v = (y - \mu_2)/\sigma_2$。若联合密度为

$$f(x,y) = \frac{\exp\left\{-\dfrac{u^2 - 2\rho uv + v^2}{2(1-\rho^2)}\right\}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}},$$

则称 (X, Y) 服从二元正态分布，记为

$$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho).$$

3.2 边缘 (际) 分布

边缘分布的概念

定义 3.6　边缘（际）分布

设 (X, Y) 的联合分布函数为 F。其分量 X, Y 的分布称为 (X, Y) 的**边缘分布**，满足

$$F_X(x) = F(x, +\infty), \qquad F_Y(y) = F(+\infty, y).$$

- **联合分布唯一确定边缘分布**，反之不然。

离散型边缘分布

- 设 $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$，则

$$P(X = x_i) = \sum_j p_{ij} = p_{i\cdot},$$

$$P(Y = y_j) = \sum_i p_{ij} = p_{\cdot j}.$$

离散型边缘分布：例

例 6　离散型边缘分布

调查 500 人喜好的运动。从中随机选取一人，求运动偏好与性别的联合分布及边缘分布。调查结果如下：

Sport \ Gender	Male	Female	Total
Football	120	75	195
Badminton	100	25	125
Other	50	130	180
	270	230	500

离散型边缘分布：例（续）

- 则联合分布和边际分布分别为：

Sport \ Gender	Male	Female	Total
Football	0.24	0.15	0.39
Badminton	0.20	0.05	0.25
Other	0.10	0.26	0.36
	0.54	0.46	1

n 维离散型边缘分布

- 设

$$p_{j_1,\dots j_n} = P(X_1 = a_{1j_1}, \dots, X_n = a_{nj_n}).$$

为简化记号，只考虑前 m 个坐标组成的向量 $(X_1, \dots, X_m)$，其中 $1 \le m < n$。其边缘分布律为

$$\begin{aligned} &P(X_1 = a_{1j_1}, \dots, X_m = a_{mj_m}) \\ &\quad = \sum_{j_{m+1}} \cdots \sum_{j_n} p_{j_1,\dots j_n}. \end{aligned}$$

即对不需要的变量求和。

连续型边缘密度

定义 3.7　边缘概率密度函数

设 (X, Y) 的联合密度为 $f(x, y)$。其分量 X, Y 的密度称为**边缘密度**，分别为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy,$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx.$$

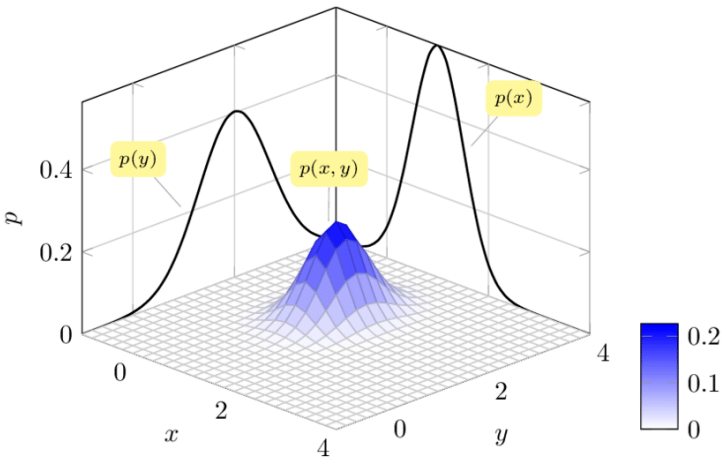
例：二元正态分布的边缘分布

例 7　二元正态分布的边缘分布

设 (X_1, X_2) 服从 $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$。则可证明

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), \qquad X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2).$$

例：二元正态分布的边缘分布（续）



例：二元正态分布的边缘分布（续）

- 解：

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\},$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left\{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}.$$

注意：边缘分布与参数 ρ 无关。

边缘分布与边缘密度：一般形式

- 记 $\boldsymbol{U} = (X_1, \ldots, X_k)$，$\boldsymbol{V}$ 为其余分量，则

$$F_{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{u}) = F(\boldsymbol{u}, +\infty, \ldots, +\infty).$$

- 离散型情形：对**其余分量求和**；连续型情形：对**其余分量积分**：

$$f_{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{u}) = \int_{\mathbb{R}^{n-k}} f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{v}.$$

Pop quiz 1

在 $0 < x, y < 1$ 内，两种联合密度分别为（区域外均为 0）

$$p(x,y) = x + y, \qquad q(x,y) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right),$$

问题 1　两种情形下，X 的边缘密度（$0 < x < 1$）：

(A) 均为 $x + \frac{1}{2}$　　(B) 均为 1　　(C) 二者不同

问题 2　填空：两者的联合分布____，边缘分布____（相同 / 不同）。

Pop quiz 1

在 $0 < x, y < 1$ 内，两种联合密度分别为（区域外均为 0）

$$p(x,y) = x + y, \qquad q(x,y) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right),$$

问题 1 两种情形下，X 的边缘密度（$0 < x < 1$）：

(A) 均为 $x + \frac{1}{2}$　　(B) 均为 1　　(C) 二者不同

问题 2 填空：两者的联合分布不同，边缘分布相同（相同 / 不同）。

3.3 条件分布

离散型随机变量的条件分布

定义 3.8　条件分布律

设 $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$。若 $p_{\cdot j} > 0$，则

$$P(X = x_i \mid Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

称为给定 $Y = y_j$ 时 X 的**条件分布律**。

- 同理，若 $p_{i\cdot} > 0$，则

$$P(Y = y_j \mid X = x_i) = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

连续型随机变量的条件密度

定义 3.9　条件概率密度函数

设 (X, Y) 的联合密度为 $f(x,y)$。当 $f_Y(y) > 0$ 时，称

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

为给定 $Y = y$ 时 X 的**条件密度**。同理，当 $f_X(x) > 0$ 时，

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}.$$

条件密度：二元正态分布

例 8　条件密度：二元正态分布

设 (X, Y) 服从二元正态分布 $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$，试求 $X \mid (Y = y)$ 的条件概率密度。

二元正态分布：条件密度

- 记 $\mu_y = \mu_1 + \rho\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)$，$s^2 = \sigma_1^2(1-\rho^2)$，则

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_y)^2}{2s^2}\right\}.$$

- 因而**条件分布仍为正态分布**：

$$X \mid (Y=y) \sim N(\mu_y, s^2).$$

条件密度：单位圆上的均匀分布

例 9　条件密度：单位圆上的均匀分布

设 X, Y 服从单位圆上的均匀分布，试求 $f_{X|Y}(x|y)$ 和 $f_{Y|X}(y|x)$。

单位圆上的均匀分布：边缘密度

- 联合密度为 $f(x,y) = 1/\pi$ $(x^2 + y^2 \le 1)$，区域外为 0。
- 固定 $|y| < 1$，对水平方向积分：

$$f_Y(y) = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi}\, dx = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}.$$

单位圆上的均匀分布：条件密度

- 给定 $|y|<1$，联合密度除以边缘密度，得到

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, & |x|\le\sqrt{1-y^2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

3.4 相互独立的随机变量

随机变量相互独立的定义

定义 3.10　随机变量相互独立

设 (X, Y) 的联合分布函数为 F，边缘分布函数为 F_X, F_Y。若对任意 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$，

$$F(x, y) = F_X(x) F_Y(y),$$

则称 X, Y 相互独立。

独立性的等价条件

定理 3.1　独立性的判别

- **离散型：** 联合分布律为 p_{ij}，则

$$X \text{和} Y \text{独立} \quad \Longleftrightarrow \quad p_{ij} = p_{i\cdot} p_{\cdot j}.$$

- **连续型：** 联合密度为 f，则

$$X \text{和} Y \text{独立} \quad \Longleftrightarrow \quad f(x,y) = f_X(x) f_Y(y).$$

独立性判断

例 10　独立性判断

判断下列情形中 X 与 Y 是否相互独立。

(1) $(X,Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$。

(2) (X,Y) 服从矩形 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上的均匀分布。

(3) (X,Y) 服从单位圆上的均匀分布。

独立性判断：答案

(1) 当且仅当 $\rho = 0$ 时独立。此时二元正态联合密度可写为两个边缘密度的乘积。

(2) 独立。矩形内的联合密度满足

$$f(x,y) = \frac{1}{(b-a)(d-c)} = f_X(x) f_Y(y),$$

矩形外两边均为 0。

(3) 不独立。给定 $Y = y$ 后，X 的取值范围为

$$-\sqrt{1-y^2} \le X \le \sqrt{1-y^2},$$

随 y 改变，条件分布也随之改变。

n 维随机变量相互独立

定义 3.11　多维随机向量的相互独立性

设 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \ldots, X_n) \sim F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$，记 $X_i \sim F_i(x_i)$。若对任意 $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$，

$$F(x_1, \ldots, x_n) = F_1(x_1)F_2(x_2)\cdots F_n(x_n),$$

则称随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立。

n 维随机变量相互独立（续）

- 离散型：

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i).$$

- 连续型：

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i).$$

3.5 随机向量函数的分布

二维变换的 Jacobi 定理

定理 3.2　二维密度变换

设 (X, Y) 的联合密度为 $f_{X,Y}(x, y)$，令

$$(Z_1, Z_2) = g(X, Y), \qquad Z_1 = g_1(X, Y), \quad Z_2 = g_2(X, Y).$$

变换在相应区域上一一对应，逆映射 $x = h_1(z_1, z_2)$、$y = h_2(z_1, z_2)$ 连续可微，Jacobi 行列式非零。则 (Z_1, Z_2) 的联合密度为

$$f_{Z_1,Z_2}(z_1, z_2) = \begin{cases} f_{X,Y}\big(h_1(z_1, z_2), h_2(z_1, z_2)\big)|J(z_1, z_2)|, & (z_1, z_2) \in D, \\ 0, & (z_1, z_2) \notin D, \end{cases}$$

其中 D 为变换后的区域，$J(z_1, z_2) = \det\left(\dfrac{\partial(h_1, h_2)}{\partial(z_1, z_2)}\right)$。

和的分布

定理 3.3　和的密度

设 (X, Y) 的联合密度为 $f(x,y)$，则 $Z = X + Y$ 的密度为

$$\begin{aligned} p(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y)\, dy. \end{aligned}$$

和的密度：变换与边缘化

(1) 令 $W = X,\ Z = X + Y$。逆变换为 $x = w,\ y = z - w$，

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad f_{W,Z}(w,z) = f(w, z-w).$$

(2) 对 W 积分，得到 Z 的边缘密度：

$$p(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{W,Z}(w,z)\, dw = \int_{-\infty}^{\infty} f(w, z-w)\, dw.$$

商的分布

定理 3.4　商的密度

如果 (X, Y) 是二维连续型随机向量，它们的联合密度为 $f(x, y)$，则它们的商 X/Y 是连续型随机变量，具有密度函数

$$p_{X/Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |w| f(wz, w)\, dw, \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

商的密度：变换与边缘化

(1) 令 $W = Y$, $Z = X/Y$。在 $w \neq 0$ 时，逆变换为 $x = wz$, $y = w$，

$$J = \begin{vmatrix} z & w \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -w, \qquad f_{W,Z}(w,z) = |w| f(wz, w).$$

(2) 对 W 积分，得到 $Z = X/Y$ 的边缘密度：

$$p_{X/Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |w| f(wz, w)\, dw.$$

交换 X, Y，同理可得 Y/X 的密度。

特例

(1) **二项分布：** 若 $X \sim B(n,p)$、$Y \sim B(m,p)$ 独立，则

$$X+Y \sim B(n+m,p).$$

(2) **Poisson 分布：** 若 $X \sim P(\lambda)$、$Y \sim P(\mu)$ 独立，则

$$X+Y \sim P(\lambda+\mu).$$

(3) **正态分布：** 若 $X_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$ 相互独立，a_i, b 为常数且 a_i 不全为零，则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i + b,\ \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2\right).$$

商的分布：指数分布之商

例 11　商的分布：指数分布之商

设随机变量 X 与 Y 相互独立，同服从参数 $\lambda = 1$ 的指数分布，试求 X/Y 的密度函数。

商的分布：指数分布之商（续）

- 解：(X, Y) 的联合密度为

$$p(u, v) = e^{-u-v}, \quad u > 0,\ v > 0.$$

利用商的密度公式，

$$p_{X/Y}(z) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty} te^{-zt-t}\, dt = \frac{1}{(1+z)^2}, & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

易见 $p_{Y/X}(z)$ 同上。

Pop quiz 2

设 $X_1, \ldots, X_n$ 相互独立，分布函数分别为 $F_1, \ldots, F_n$。记

$$M = \max_i X_i, \qquad m = \min_i X_i.$$

问题 1 求最大值 M 的分布函数 $F_M(x)$。

问题 2 求最小值 m 的分布函数 $F_m(x)$。

Pop quiz 2：答案

问题 1 最大值的分布函数为

$$F_M(x) = P(M \le x) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x).$$

最大值不超过 x，当且仅当每个变量都不超过 x。

问题 2 最小值的分布函数为

$$F_m(x) = 1 - P(m > x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - F_i(x)].$$

最小值大于 x，当且仅当每个变量都大于 x。