

概率论与数理统计

Lecture 4: 随机变量及其分布 (二)

曾靖

中国科学技术大学统计与金融系



目录

2.3 连续型随机变量

2.4 随机变量函数的分布

2.3 连续型随机变量

连续型随机变量的引入

- 非离散型随机变量 X 的取值不能一一枚举，不能像离散型随机变量那样用列表表示；
- 非离散型随机变量取某个指定值的概率常常为 0；
- 因此我们一般研究 X 落在某个区间中的概率

$$P(a < X \leq b),$$

感兴趣的事件往往用一个区间来表达。

连续型随机变量的引入

- 由事件运算及概率性质,

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a).$$

故只要研究随机变量 X 落在 $(-\infty, x]$ 中的概率。

定义 2.9 分布函数

设 X 为随机变量, x 为任一实数, 称

$$F(x) = P(X \leq x)$$

为 X 的**(累积) 分布函数** (cumulative distribution function, 简称 c.d.f.)。

离散型随机变量的分布函数

- 设 X 为一离散型随机变量，它以概率 $\{p_1, \dots, p_n, \dots\}$ 取值 $\{a_1, \dots, a_n, \dots\}$ （假设从小到大排好顺序）。则

$$F(x) = \sum_{\{i: a_i \leq x\}} p_i.$$

- 反之，

$$P(X = a_i) = P(X \leq a_i) - P(X \leq a_{i-1}) = F(a_i) - F(a_{i-1}).$$

- 因此，离散型随机变量的分布律和分布函数互相确定。

离散型随机变量的分布函数：例

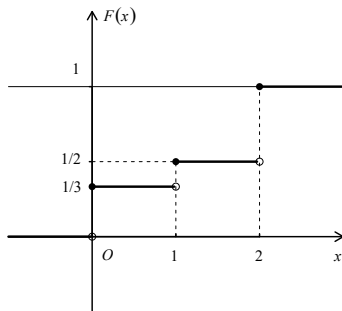
例 1

设离散型随机变量 X 的分布律如下：

X	0	1	2
P	1/3	1/6	1/2

求 X 的分布函数。

离散型随机变量的分布函数图



- 由上可以看出分布函数在 $0, 1, 2$ 上有跳，跳的高度为随机变量取该点的概率值。

分布函数的性质

分布函数的性质

(1) F 是非减的函数：对任何 $x_1 < x_2$ ，都有

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < X \leq x_2) \geq 0.$$

(2) $0 \leq F(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$, 且

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

(3) $F(x)$ 右连续。

概率密度函数的定义

- 由 $P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$ 很容易联想到原函数与被积函数的微积分基本原理。

定义 2.10 连续型随机变量与概率密度函数

称 X 为连续型随机变量, 如果存在一个函数 $f(x) \geq 0$, 它对于任意的 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) \, dt.$$

并称 $f(x)$ 为概率密度函数 (probability density function, or p.d.f.)。

概率密度函数的性质

性质

设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)$ ，分布函数为 $F(x)$ ，则有

(1) $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R};$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1;$

(3) 对任意 $x_1 < x_2$ ，有

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx.$$

(4) 对任意可测集 $A \subseteq \mathbb{R}$ ，有 $P(X \in A) = \int_A f(x) dx.$

概率密度函数的性质 (续)

性质 (续)

(5) 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 有 $P(X = x) = 0$ 。

(6) 因此, 对任意 $x_1 < x_2$, 区间端点是否包含不影响概率:

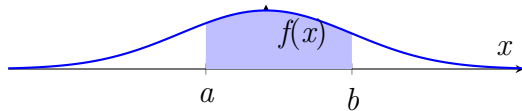
$$\begin{aligned}P(x_1 < X \leq x_2) &= P(x_1 \leq X < x_2) \\&= P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 \leq X \leq x_2).\end{aligned}$$

(7) 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 则 $F'(x_0) = f(x_0)$ 。

密度函数不等于概率

关键区别

- $f(x)$ 描述点 x 附近的**概率密度**，不是点 x 处的概率：
 $f(x) \neq P(X = x)$ 。
- 当 Δx 很小时， $P(x < X \leq x + \Delta x) \approx f(x)\Delta x$ 。因此 $f(x)$ 可理解为点 x 附近“**单位长度上的概率**”。
- 概率对应密度曲线下的**面积**： $P(a < X \leq b) = \int_a^b f(t) dt$ 。



分布函数：统一描述随机变量

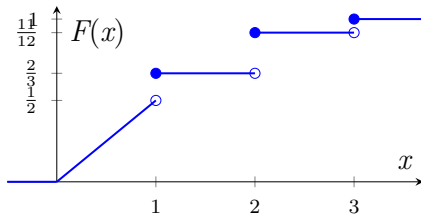
- 对任意随机变量 X ，分布函数 $F(x) = P(X \leq x)$ 总是存在；
- 离散型随机变量**：通常用分布律 $P(X = x_i) = p_i$ 研究， $F(x)$ 是阶梯函数；
- 连续型随机变量**：通常用密度函数 $f(x)$ 研究，
$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt;$$
- 一般类型的随机变量**：可能同时具有跳跃和连续部分，甚至既非离散型也非连续型，此时仍可用 $F(x)$ 研究。

例：混合型随机变量

例 2.17

设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x/2, & 0 \leq x < 1, \\ 2/3, & 1 \leq x < 2, \\ 11/12, & 2 \leq x < 3, \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$



- 因此 X 同时具有连续部分和离散部分，既不是离散型，也不是连续型。

关于连续性分布函数的结论

- **连续型**: F 绝对连续, 且

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

但密度函数 f 不一定连续。

- **混合型**: F 可在有限个点跳跃, 其余部分由密度函数描述; 这类随机变量既非离散型也非连续型。
- **一般类型**: F 连续仍不能保证 X 为连续型; 还须要求 F 绝对连续。

Pop quiz

设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x, & 0 \leq x < 1, \\ 2(x-2)^2, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

问题 1 $F(1)$ 等于:

(A) $\frac{1}{3}$

(B) $\frac{2}{3}$

(C) 1

问题 2 在 $x=1$ 处, 下列说法正确的是:

(A) 二者均连续

(B) 仅 F 连续

(C) 仅 f 连续

Pop quiz

设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x, & 0 \leq x < 1, \\ 2(x-2)^2, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

问题 1 $F(1)$ 等于:

(A) $\frac{1}{3}$

(B) $\frac{2}{3}$

(C) 1

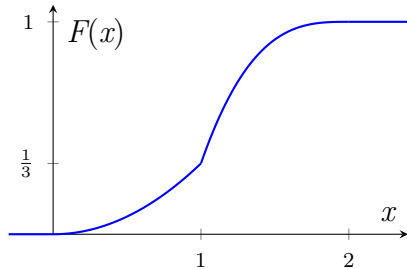
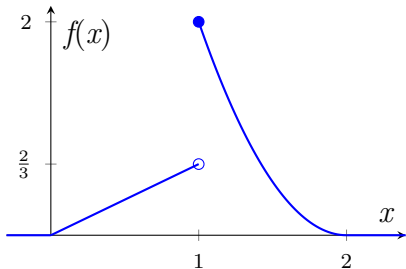
问题 2 在 $x=1$ 处, 下列说法正确的是:

(A) 二者均连续

(B) 仅 F 连续

(C) 仅 f 连续

连续型随机变量: F 连续, f 可不连续



结论

连续型随机变量的分布函数 F 一定连续; 密度函数 f 则不一定连续。

均匀分布

定义 2.14 均匀分布

设 $-\infty < a < b < +\infty$ ，如果随机变量 X 具有密度函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

则称该随机变量为区间 $[a, b]$ 上的均匀分布，记作 $U[a, b]$ 。

均匀分布的分布函数

- 均匀分布 $U[a, b]$ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

正态分布的定义

定义 2.11 正态分布

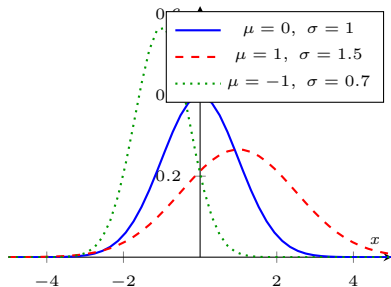
如果一个随机变量 X 具有概率密度函数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

其中 $\mu \in \mathbb{R}$, 则称 X 为一正态随机变量, 记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 。

- 具有参数 $\mu = 0, \sigma = 1$ 的正态分布称为标准正态分布。
- 用 $\Phi(x)$ 和 $\varphi(x)$ 表示标准正态分布 $N(0, 1)$ 的分布函数 (cdf) 和密度函数 (pdf)。

正态分布密度图与性质



- 密度函数以 $x = \mu$ 为对称轴， μ 称为位置参数；
- 密度函数在 $x = \mu$ 处达到最大值，并在两侧严格单调；
- σ 决定密度函数的陡峭程度；
- 若 $F(x)$ 为 $N(\mu, \sigma^2)$ 的分布函数，则

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

正态分布的标准化

例 2

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ 。

证：由

$$\begin{aligned} P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq x\right) &= P(X \leq \sigma x + \mu) \\ &= \int_{-\infty}^{\sigma x + \mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(t-\mu)^2/(2\sigma^2)} dt \\ &\stackrel{t=\sigma z + \mu}{=} \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz. \end{aligned}$$

正态分布标准化的应用

例 3

求数 k 使得对于正态分布的变量有

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) = 0.95.$$

解：由 $\Phi(k) - \Phi(-k) = 0.95$ 及 $\Phi(-k) = 1 - \Phi(k)$ ，得 $2\Phi(k) - 1 = 0.95$ ，所以 $\Phi(k) = 0.975$ 。查表得 $k = 1.96$ 。

指数分布的定义与分布函数

定义 2.12 指数分布

若随机变量 X 具有概率密度函数

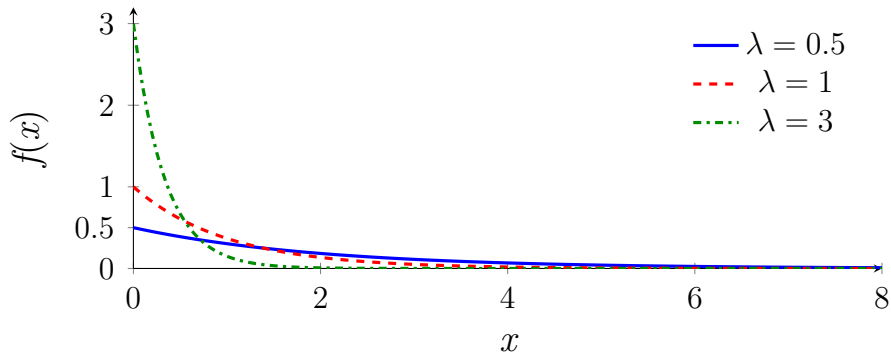
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

其中 $\lambda > 0$ 为常数, 则称 X 服从参数为 λ 的指数分布。

指数分布的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

指数分布的密度图



- 从上图可以看出，参数 λ 愈大，密度函数下降得愈快。

指数分布的无记忆性

无记忆性

若 $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, 则对任意 $s, t > 0$,

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t).$$

它是唯一具有无记忆性的连续型分布。

与几何分布的联系

若 $\xi \sim G(p)$, 则对任意正整数 m, n ,

$$P(\xi > m + n \mid \xi > m) = P(\xi > n).$$

几何分布计试验次数, 指数分布计等待时间。

2.4 随机变量函数的分布

离散型随机变量函数的分布

- 考虑由一维随机变量 X 的概率分布去求其一给定函数 $Y = g(X)$ 的分布。
- 设 X 的分布律为

$$P(X = x_i) = p_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

对函数 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 令 $Y = g(X)$, 则 Y 的分布律为

$$P(Y = y_j) = P(g(X) = y_j) = \sum_{x_i: g(x_i) = y_j} P(X = x_i) = \sum_{i: g(x_i) = y_j} p_i.$$

离散型随机变量函数的分布：例

例 4

设 X 的概率函数为

X	-1	0	1	2
P	1/4	1/2	1/8	1/8

试求 $Y = X^2$, $Z = X^3 + 1$ 的分布律。

连续型随机变量的情形：密度变换公式

定理 2.1 密度变换公式

设随机变量 X 有概率密度函数 $f(x)$, $x \in (a, b)$ (a, b 可以为 ∞), 而 $y = g(x)$ 在 $x \in (a, b)$ 上是严格单调的连续函数, 存在唯一的反函数 $x = h(y)$, $y \in (\alpha, \beta)$, 并且 $h'(y)$ 存在且连续, 那么 $Y = g(X)$ 也是连续型随机变量且有概率密度函数

$$p(y) = f(h(y))|h'(y)|, \quad y \in (\alpha, \beta).$$

连续型随机变量函数的分布：例

例 5

设随机变量 $X \sim U(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ，求 $Y = \tan X$ 的概率密度函数。

解：由于 $g(x) = \tan x$ 单调可微，反函数 $x = \arctan y$ 连续可微，因此由密度变换公式知

$$f(y) = \frac{1}{\pi} \arctan'(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}, \quad -\infty < y < \infty.$$

- 此分布称为 Cauchy 分布。

逐段单调时的密度变换

定理 2.2 逐段单调时的密度变换

设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$, $a < x < b$ 。若 $(a, b) = \bigcup_j I_j$, 其中 I_j 是有限个或可列个互不重叠的子区间, 且 g 在每个 I_j 上严格单调, 并有连续可微的反函数 $x = h_j(y)$, $y \in g(I_j)$, 则 $Y = g(X)$ 的密度函数为

$$f_1(y) = \sum_{j: y \in g(I_j)} f(h_j(y)) |h'_j(y)|.$$

逐段单调时的密度变换：例

例 6

设 $X \sim N(0, 1)$ ，求 $Y = X^2$ 的概率密度。

解：由于函数 $y = x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $[0, \infty)$ 上严格单调，因此

$$\begin{aligned} f(y) &= \phi(-\sqrt{y})|-\sqrt{y}'|I_{\{y>0\}} + \phi(\sqrt{y})|\sqrt{y}'|I_{\{y>0\}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}I_{\{y>0\}}. \end{aligned}$$