

概率论与数理统计

Lecture 2: 事件及其概率 (二)

曾靖

中国科学技术大学统计与金融系



目录

1.4 条件概率

1.4.1 条件概率的定义

1.4.2 全概率公式

1.4.3 贝叶斯公式

1.5 独立性

1.4 条件概率

1.4.1 条件概率的定义

一般讲，条件概率就是在知道了一定的信息下所得到的随机事件的概率。

定义 1.13 条件概率

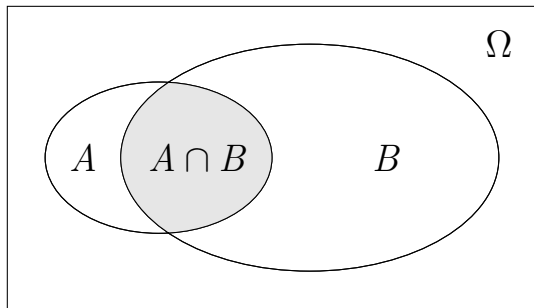
设事件 A 和 B 是随机试验 Ω 中的两个事件， $P(B) > 0$ ，称

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件 B 发生条件下事件 A 发生的**条件概率**。

条件概率：图示

把概率理解为图中给定部分的面积，图中总面积 (Ω 的面积) 为 1。所以 $P(A|B)$ 描述的就是 A 在 B 中的面积 $P(AB)$ 与 B 的面积 $P(B)$ 的比值，即 $P(A|B) = P(AB)/P(B)$ 。



条件概率：统计定义

补充 条件概率的统计解释

从概率的统计定义（即用频率来近似概率）这一角度来理解条件概率：

设在 n 次独立试验中，事件 A 发生了 n_A 次，事件 B 发生了 n_B 次，事件 AB 发生了 n_{AB} 次，事件 B 发生下事件 A 发生的频率为

$$\frac{n_{AB}}{n_B} \approx \frac{P(AB)}{P(B)}$$

例：不放回抽检

例 1

抽检某工厂的产品，设 10 件被抽查的产品中有 3 件一等品，7 件二等品。现从这 10 件产品中做不放回抽检，问第一次抽检为一等品后抽检的第二件也是一等品的概率。

乘法定理

定理 1.1 乘法定理

由 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ 可得

$$P(AB) = P(A|B)P(B).$$

由归纳法容易推广为 n 个事件同时发生的概率有如下公式:

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_1 \cdots A_{n-1})$$

例：短绳连圈（乘法定理）

例 2

将 n 根短绳的 $2n$ 个端头任意两两连接，试求恰好连成 n 个圈的概率。

1.4.2 全概率公式

定义 1.14 完备事件群 (划分)

设 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 是样本空间 Ω 中的两两不相容的一组事件, 即 $B_i B_j = \phi, i \neq j$, 且满足 $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$, 则称 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 是样本空间 Ω 的一个**划分**。

定理 1.2 全概率公式

设 $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ 是样本空间 Ω 的一个划分, 且 $P(B_i) > 0 (i = 1, \dots, n)$, A 为 Ω 中的一个事件, 则

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)$$

例：零部件次品率

例 3

设某厂产品的一个零部件是由三家上游厂商供货的。已知有一半是 B_1 厂提供的， B_2 厂商和 B_3 分别提供 25%。已知厂商 B_1 和 B_2 的次品率都是 2%， B_3 的次品率为 4%，从该厂产品中任取一个产品，问该产品的这个零部件是次品的概率。

例：波利亚罐子模型

例 4

罐中有 a 个白球和 b 个黑球。每次随机抽取一个球，观察其颜色后，将它连同 c 个同色球一起放回罐中，如此反复进行。证明：第 n 次取球时取出白球的概率为

$$\frac{a}{a+b}$$

1.4.3 贝叶斯公式

定理 1.3 Bayes 公式

设 $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ 是样本空间的一个分割, A 为 Ω 中的一个事件, $P(B_i) > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, $P(A) > 0$, 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j)}$$

例：癌症检测

例 5

某种诊断癌症的快速检测试剂经临床试验有如下效果：癌症患者阳性的概率为 95%，正常人阴性的概率为 95%。现在在某人群中用该试剂进行普查。设该人群患该癌症的概率为 0.5%，若某人反应为阳性，问他患此癌症的概率。

Bayes 应用：垃圾邮件过滤

对一封新邮件，记 $A = \{\text{邮件中出现关键词“中奖”}\}$ ，
 $B = \{\text{垃圾邮件}\}$ 。

单关键词示例：

- ▶ 在 100 封垃圾邮件中有 5 封出现“中奖”，故 $P(A | B) = 0.05$ 。
- ▶ 在 1000 封正常邮件中有 1 封出现“中奖”，故 $P(A | \bar{B}) = 0.001$ 。
- ▶ 假设 $P(B) = P(\bar{B}) = 0.5$ ，则

$$P(B | A) = \frac{0.05 \times 0.5}{0.05 \times 0.5 + 0.001 \times 0.5} \approx 0.9804$$

看到关键词“中奖”后，垃圾邮件的概率由 0.5 提高到约 0.98。

Bayes 应用：多关键词过滤

设一封邮件中同时出现关键词 A_1 、 A_2 、 $\dots$ 、 A_d 。Bayes 公式给出

$$P(B \mid A_1 A_2 \cdots A_d) = \frac{P(A_1 A_2 \cdots A_d \mid B) P(B)}{P(A_1 A_2 \cdots A_d \mid B) P(B) + P(A_1 A_2 \cdots A_d \mid \bar{B}) P(\bar{B})}$$

然而，现实中 $P(B \mid A_1 A_2 \cdots A_d)$ 往往难以计算。

朴素 Bayes 近似：假设给定邮件类别后，各关键词相互独立，即

$$P(A_1 A_2 \cdots A_d \mid B) \approx \prod_{i=1}^d P(A_i \mid B),$$
$$P(A_1 A_2 \cdots A_d \mid \bar{B}) \approx \prod_{i=1}^d P(A_i \mid \bar{B})$$

关键词之间通常并非真正独立，这是该假设带来的近似。

Pop quiz 1

问题 1 设 $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.5$, $P(A \cup B) = 0.8$ 。则 $P(B|A^c)$ 等于:

- (A) 0.2
- (B) 0.4
- (C) 0.5

问题 2 设 B_1 、 B_2 构成样本空间的一个划分, $P(B_1) = 0.3$, $P(A|B_1) = 0.8$, $P(A|B_2) = 0.2$ 。若 $P(A) = 0.38$, 则 $P(B_1|A)$ 等于:

- (A) 0.24
- (B) 0.38
- (C) $\frac{12}{19}$

Pop quiz 1

问题 1 设 $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.5$, $P(A \cup B) = 0.8$ 。则 $P(B|A^c)$ 等于:

(A) 0.2

(B) 0.4

☒ (C) 0.5

问题 2 设 B_1 、 B_2 构成样本空间的一个划分, $P(B_1) = 0.3$, $P(A|B_1) = 0.8$, $P(A|B_2) = 0.2$ 。若 $P(A) = 0.38$, 则 $P(B_1|A)$ 等于:

(A) 0.24

(B) 0.38

☒ (C) $\frac{12}{19}$

Game Time!

Game Time: Monty Hall 游戏

规则:

1. 一共有三扇门，其中只有一扇门后有汽车，其余门后都是山羊。
2. 你先等概率选择一扇门，但暂时不打开。
3. 主持人知道每扇门后的物品，并从其余门中打开一扇确定有山羊的门。
4. 你可以坚持原选择或者换门。
5. 最后打开你选择的门，判断是否赢得汽车。

问题: 坚持和换门分别有多大的概率赢得汽车?



Game Time: 思考题

四扇门：只有一扇门后有汽车。你先选一扇门，主持人从其余三扇门中打开一扇确定有山羊的门。此时在剩下的两扇门中等概率换门，换门和不换门赢得汽车的概率分别是多少？

n 扇门：推广到 n 扇门，只有一扇门后有汽车。主持人从其余门中打开一扇确定有山羊的门，你在剩下的 $n - 2$ 扇门中等概率换门。换门和不换门赢得汽车的概率分别是多少？

1.5 独立性

1.5 独立性的定义

定义 1.15 两个事件相互独立

设 A, B 是随机试验中的两个事件，若满足 $P(AB) = P(A)P(B)$ ，则称事件 A 和 B 相互独立。

独立性的等价定理

定理 1.4 独立性的等价定理

设 A 和 B 是样本空间 Ω 中的两个事件，则下述四个陈述相互等价：(1) A 与 B 相互独立；(2) A 与 $\bar{B}$ 相互独立；(3) $\bar{A}$ 与 B 相互独立；(4) $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相互独立。

思考：互斥事件是否一定独立？

独立性的等价定理

定理 1.4 独立性的等价定理

设 A 和 B 是样本空间 Ω 中的两个事件，则下述四个陈述相互等价: (1) A 与 B 相互独立; (2) A 与 $\bar{B}$ 相互独立; (3) $\bar{A}$ 与 B 相互独立; (4) $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相互独立。

思考：互斥事件是否一定独立？

答案：不一定。若 A 与 B 互斥，则 $P(AB) = 0$ ；当 $P(A) > 0$ 且 $P(B) > 0$ 时， $P(A)P(B) > 0$ ，所以 A 与 B 不独立。只有当 $P(A) = 0$ 或 $P(B) = 0$ 时，二者才可能同时互斥且独立。

n 个事件相互独立

独立性的定义可以推广到 n 个事件。

定义 1.16 n 个事件相互独立

设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是样本空间 Ω 中的 n 个事件, 若对 $\forall k$ 及 $\forall 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ 满足

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}),$$

则称事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立。

在上式中一共包括了 $2^n - n - 1$ 个关系式。因此 n 个事件的相互独立性与这 $2^n - n - 1$ 个关系式同时成立等价。

n 个事件相互独立的等价定义

定义 1.17 n 个事件相互独立等价定义

设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是随机试验中的 n 个事件, 以 $\tilde{A}_i$ 表示 A_i 或 $\bar{A}_i$ 之一。若满足

$$P(\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \cdots \tilde{A}_n) = P(\tilde{A}_1)P(\tilde{A}_2) \cdots P(\tilde{A}_n),$$

则称事件列 $A_1, A_2, \dots, A_n$ **相互独立**。(上面有 2^n 个等式)

两两独立的定义

补充 两两独立

若事件列 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中任意两个事件相互独立, 即对任意 $1 \leq i < j \leq n$, 都有

$$P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j),$$

则称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ **两两独立**。

例：两两独立而不相互独立

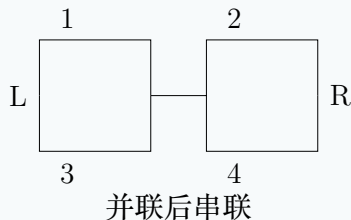
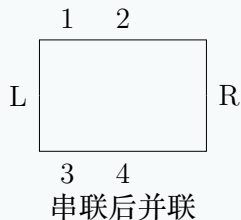
例 6

有四个同样的小球，分别在其上写上“1”，“2”，“3”和“1, 2, 3”。引进三个事件： $A_i = \{\text{随机取一球，球上有数字 } i\}$ ， $i = 1, 2, 3$ 。试讨论事件 A_1, A_2, A_3 是否相互独立。

例：电路可靠性

例 7

在元件可靠性研究中，我们考虑如下两种电路：



其中 1-4 表示 4 个继电器，它们是否开通是相互独立的，设继电器导通的概率为 p , ($0 < p < 1$)，求两种电路从 L 到 R 为通路的概率。

例：至少发生一次

例 8

设事件 A 在第 j 次试验中发生的概率为 $p_j, j = 1, 2, \dots, n$, 且这 n 次试验是相互独立的, 其中 $p_j \geq p_0 > 0$, 求在这 n 次独立试验中事件 A 至少发生一次的概率。

小概率原理

小概率原理

一个事件如果发生的概率很小的话，那么它在一次试验中是几乎不可能发生的，但在多次重复试验中几乎是必然发生的，数学上称之**小概率原理**。

- ▶ 彩票中奖
- ▶ 飞机晚点
- ▶ ...

Pop quiz 2

问题 3 设 A 、 B 、 C 两两独立，且 $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$ 。下列说法中一定成立的是：

- (A) $P(ABC) = 1/8$
- (B) $P(A \cup B) = 3/4$
- (C) $P(A|BC) = 1/2$

问题 4 下列关于事件独立性的说法正确的是：

- (A) 两个互不相容且概率均为正的事件一定相互独立
- (B) 若 A 与 B 相互独立，则 A 与 B^c 也相互独立
- (C) n 个事件两两独立，就一定相互独立

Pop quiz 2

问题 3 设 A 、 B 、 C 两两独立，且 $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$ 。下列说法中一定成立的是：

- (A) $P(ABC) = 1/8$
- ☒ (B) $P(A \cup B) = 3/4$
- (C) $P(A|BC) = 1/2$

问题 4 下列关于事件独立性的说法正确的是：

- (A) 两个互不相容且概率均为正的事件一定相互独立
- ☒ (B) 若 A 与 B 相互独立，则 A 与 B^c 也相互独立
- (C) n 个事件两两独立，就一定相互独立