

概率论与数理统计

Lecture 1: 事件及其概率 (1)

曾靖

中国科学技术大学统计与金融系



目录

1.1 概率论简史

1.2 随机试验和随机事件

1.3 概率的定义及性质

1.1 概率论简史

概率论简史

♠ French Society in the 1650's

- ▶ 赌博是一种流行时尚
- ▶ 法律没有禁止
- ▶ 当游戏越来越复杂，利益越来越大时，需要数学方法来计算获胜可能性



概率论简史

♠ The origin of the mathematical study of probability

- ▶ 贵族De Mere在与一名宫廷卫士一次赌博时关于如何分赌本的问题发生了争执，于是请教他的好友数学家 Blaise Pascal.
- ▶ Pascal 与他的另一名好友数学家Pierre Fermat通信讨论了该问题，形成概率论中一个重要的基本概念—数学期望



概率论简史

- ♠ The first book on probability
- ▶ **Christiaan Huygens** 在 1657 年写了世界上第一本关于概率论的著作 **De ratiociniis in ludo aleae** (“On Reasoning in Games of Chance”), 中文译名 “论赌博中的计算”



概率论简史

♠ From Games to Science

- ▶ **Pierre-Simon Laplace** 在他 1812 年的著作 **Theorie Analytique des Probabilities**(分析概率论) 中介绍了概率的数学理论及其科学应用.
- ▶ **Laplace** 只考虑了古典概型, 对一般的概率及其应用没有介绍.
- ▶ 到 1850 年, 许多数学家发现古典概型对一般场合不合理, 开始尝试重新定义概率



概率论简史

♠ Axiomatic Development

- ▶ **Andrey Kolmogorov** 第一个在他 1933 年的著作 **Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung** 中严密的定义了概率.
- ▶ 类似于 **Euclid** 基于公理体系建立几何, 他从基本公理建立了概率理论, 从而使概率论称为一门严谨的数学分支
- ▶ 概率理论的现代研究和测度论非常紧密的结合在一起



1.2 随机试验和随机事件

随机试验和随机事件

- ▶ 随机试验中要求试验的结果至少 2 个
- ▶ 每次试验或观测得到其中的一个结果，在试验或观测之前不能预知是哪个结果发生
- ▶ 一般还要求试验在相同条件下能够重复

如观测把硬币抛 4 次后正面向上的次数；观测某地的温度变化；某电话总机单位时间内转接的电话次数。

《奥德赛》的故事

奥德修斯在冥界向盲眼先知**忒瑞西阿斯 (Tiresias)** 求问归途。他预先得知：不可伤害**太阳神赫利俄斯的神牛**；否则船只与同伴将覆没；返乡后还将面对求婚者。



《奥德赛》的故事



信息不同，随机性不同

- ▶ 对**掌握预言的奥德修斯**，这些将发生的事并非随机。
- ▶ 对**不知预言的船员**，前方结果不可预知，仍可看作随机事件。

同一件事，随机性是否取决于掌握的信息？

基本事件

定义 1 基本事件: 随机试验中的每个单一结果，它犹如分子中的原子，在化学反应中不能再分，所以有**基本**两字。

如把硬币抛 3 次后有 8 种可能结果：正正正、正正反、正反正、反正正、正反反、反正反、反反正、反反反。这 8 种可能结果的每一个都是基本事件。

样本空间

定义 2 样本空间(Sample Space): 随机试验中所有基本事件所构成的集合, 通常用 Ω 或 S 表示。样本空间中的元素, 称为样本点, 通常用 ω 等表示。

随机事件

定义 3 随机事件: 简称事件 (Event), 在随机试验中所关心的可能出现的各种结果, 它由一个或若干个基本事件组成。随机事件常用大写英文字母 A, B, C, D 等表示。如果用语言表达, 则要用花括号括起来。

若随机试验的结果为 ω , 则事件 A 发生 (数学上: $\omega \in A$)。

定义 4 必然事件 (Ω): 在试验中一定会发生的事件;

不可能事件 ($\emptyset$): 在试验中不可能发生的事件。

因此, 我们不严格的说样本空间的子集称为随机事件。

事件的关系及其运算

- ▶ **事件的和** ($A \cup B$): A 和 B 至少有一个发生
- ▶ **事件的差** ($A - B$ 或 AB^c): A 发生而 B 不发生
- ▶ **事件的积** ($A \cap B$): A 和 B 同时发生
- ▶ **互斥** (不相容): $A \cap B = \emptyset$
- ▶ **对立事件** (A^c 或 $\bar{A}$): A 不发生
- ▶ **子事件** ($A \subset B$): A 发生蕴含 B 发生

事件的运算

集合的运算法则适用于事件的运算

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cup BC = (A \cup B)(A \cup C) \quad A \cap (B \cup C) = AB \cup AC$$

$$(A \cup B)(C \cup D) = AC \cup BC \cup AD \cup BD$$

De Morgan 对偶法则:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i,$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$$

Pop quiz 1

问题 1 掷一枚骰子，令 $A = \{2, 4, 6\}$ 。下列说法正确的是：

- (A) A 是一个基本事件；
- (B) $A^c = \{1, 3, 5\}$ ，且 $A \cap A^c = \emptyset$ ；
- (C) $A \cup A^c = \emptyset$ 。

问题 2 在样本空间 Ω 中，_____ 是必然事件，_____ 是不可能事件。

Game Time!

Game Time: 石头剪刀布

规则：(1) 全班同学两两配对；(2) 不要提前商量，每人随意选择石头、剪刀或布，同时出拳一轮。

统计项目	对数
总对数	$N = \underline{\hspace{2cm}}$
平局	$n_1 = \underline{\hspace{2cm}}$
一人剪刀、一人石头	$n_2 = \underline{\hspace{2cm}}$

1.3 概率的定义及性质

概率的定义

定义 5 概率的直观定义: 概率是随机事件发生可能性大小的数字表征, 其值习惯上用 0 和 1 之间的数表示, 换句话说, 概率是事件的函数。

古典概型

(1) 古典概型: 起源于赌博游戏。

两个条件

- ▶ 第一 (有限性) 试验结果只有有限个 (记为 n)
- ▶ 第二 (等可能性) 每个基本事件发生的可能性相同

为计算事件 A 的概率, 设 A 中包含 m 个基本事件, 则

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

概率的统计定义

(2) 概率的统计定义

古典概型的两个条件往往不能满足，此时如何定义概率？常用的一种方法是把含有事件 A 的随机试验独立重复做 n 次 (*Bernoulli* 试验)，设事件 A 发生了 n_A 次，称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的频率，当 n 越来越大时，频率会在某个值 p 附近波动，且波动越来越小，这个值 p 就定义为事件 A 的概率。

主观概率

(3) 主观概率

- ▶ 个人对某个结果发生可能性的一个判断，如某人认为有 80% 的可能性房价暴跌。另一人则认为仅有 20% 的可能性。
- ▶ 有相当的生活基础
- ▶ 在金融和管理等方面有大量应用
- ▶ 基于此的概率学派称为**贝叶斯 (Bayes) 学派**；但当前用频率来定义概率的**频率派**仍是数理统计的主流，焦点是频率派认为概率是客观存在，不可能因人而异。

概率的公理化定义

(4) **概率的公理化定义**: 对概率运算规定一些简单的基本法则。

定义 6 称 $P(\cdot)$ 为一概率, 如果

- (i) 设 A 是随机事件, 则 $0 \leq P(A) \leq 1$
- (ii) 设 Ω 为必然事件, 则 $P(\Omega) = 1$
- (iii) 若事件 $A_1, A_2, \dots$ 为两两不相容的事件序列, 则

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

概率的性质

由概率的公理化定义，我们可以得到

1. $P(\phi) = 0$
2. (有限可加性) 若 $A_k \in \mathcal{F}, k = 1, \dots, n$ 且两两互斥，则

$$P\left(\sum_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$$

3. (可减性) 若 $A, B \in \mathcal{F}$ 且 $A \subset B$ ，则
 $P(B - A) = P(B) - P(A)$

概率的性质：单调性与对立事件

- 4. (单调性) 若 $A, B \in \mathcal{F}$ 且 $A \subset B$, 则 $P(A) \leq P(B)$
- 5. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

概率的性质：加法定理

6. (加法定理) 对任意的事件 $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, 有

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) &= \sum_{k=1}^n P(A_k) \\ &\quad - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) \\ &\quad - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n) \end{aligned}$$

概率的性质：次可加性

7. (次可加性) 对任意的事件 $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$, 有

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

概率的性质：连续性

8. (下连续性) 若 $A_n \in \mathcal{F}$ 且 $A_n \subset A_{n+1}, n = 1, 2, \dots$, 则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

9. (上连续性) 若 $A_n \in \mathcal{F}$ 且 $A_n \supset A_{n+1}, n = 1, 2, \dots$, 则

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

Pop quiz 2

问题 3 下列关于古典概型的说法正确的是：

- (A) 样本点可以无限多个；
- (B) 基本事件有限，且每个基本事件发生的可能性相同；
- (C) 概率必须来自个人经验判断。

问题 4 若 $A \subset B$ ，则 $P(B - A) =$ _____；
 $P(A^c) =$ _____。